1 –

2.1

a	43	**d**	0.18	**g**	2.9
b	1.3	**e**	21	**h**	0.34
c	0.91	**f**	0.34	**i**	2.5

2.2 **a** $\sqrt[3]{10\,000\,000} = 215.443...$
Ein Würfel mit diesem Volumen hätte eine Kantenlänge von ungefähr 215 m.

b $1\text{ m}^3 = 1\,000\,000\text{ cm}^3$
Gewicht von 1 m^3 Schiefer: $1\,000\,000 \cdot 2.8 = 2\,800\,000$
1 m^3 Schiefer wiegt: $2\,800\,000\text{ g} = 2.8\text{ t}$
Gewicht Felsmasse: $10\,000\,000 \cdot 2.8 = 28\,000\,000$

Das Gewicht der abgestürzten Felsmasse beträgt ungefähr 28 Mio. t.

2.3 **a** $\sqrt[3]{13\,300\,000} = 236.928...$
Ein Würfel mit diesem Volumen hätte eine Kantenlänge von ungefähr 237 m.

b $\frac{13\,300\,000}{68 \cdot 105} = 1862.745...$

Der Quader wäre ungefähr 1860 m hoch.

2.4 Das Volumen des kleinen Aquariums ist halb so gross wie das Volumen des grossen Aquariums.

Das Volumen des kleinen Aquariums beträgt somit $\frac{a^3}{2} = \frac{1}{2}a^3$.

Die Seitenlänge des kleinen Aquariums beträgt $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot a$.

Mögliche Schätzung:
Gesucht wird eine Zahl, deren 3. Potenz gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Annäherung mit Hilfe des Taschenrechners: $0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.512$
Die Kantenlänge des kleinen Aquariums beträgt etwas weniger als $0.8 \cdot a$.

Berechnung:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{0.5} = 0.7937...$$

Die Kantenlänge des kleinen Aquariums beträgt ungefähr 0.79a.

2.5 **a** Quadervolumen: $3s^3 = 5184$

Kantenlänge: $s = \sqrt[3]{\frac{5184}{3}} = \sqrt[3]{1728} = 12$

Die Kantenlängen des Quaders betragen 36 cm, 12 cm und 12 cm.

b Quadervolumen: $6a^3 = 16\,464$

Kantenlänge: $a = \sqrt[3]{\frac{16\,464}{6}} = \sqrt[3]{2744} = 14$

Die Kantenlängen des Quaders betragen 42 cm, 28 cm und 14 cm.

c Würfelvolumen: 4096 cm^3

Würfelkantenlänge: $\sqrt[3]{4096} = 16$

Flächendiagonale: $16 \cdot \sqrt{2} = 22.6274\ldots$

Umfang des Rechtecks: $2 \cdot (16 + 16 \cdot \sqrt{2}) = 32 \cdot (1 + \sqrt{2}) = 77.2548\ldots$

Das Rechteck hat einen Umfang von ungefähr 77.3 cm.

d Würfelkantenlänge: $\sqrt[3]{4096} = 16$

Körperdiagonale: $\sqrt{16^2 + (16 \cdot \sqrt{2})^2} = \sqrt{256 + 512} = 27.7128\ldots$

Die Körperdiagonale des Würfels beträgt ungefähr 27.71 cm.

2.6 **a** Zylindervolumen: $V_z = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$

Zylinderradius: $r = \sqrt[3]{\frac{V_z}{2\pi}} = 5.419\ldots$

Würfelkantenlänge: $a = 2r$

Würfelvolumen: $V_W = a^3 = (2r)^3 = 8r^3 = 8 \cdot \frac{V_z}{2\pi} = 1273.239\ldots$

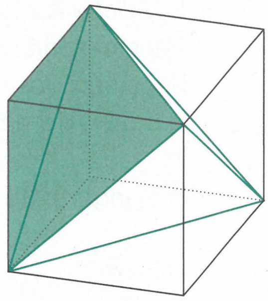
Das Würfelvolumen beträgt ungefähr 1273 cm^3.

b Würfelkantenlänge: $\sqrt[3]{5832} = 18$

Pyramidenhöhe: $\frac{3 \cdot \text{Pyramidenvolumen}}{\text{Grundfläche}} = \frac{3 \cdot 5832}{324} = 54$

Die Höhe der Pyramide beträgt 54 cm.

c *Zum Tüfteln:*
Die grün eingefärbte Eckpyramide entspricht $\frac{1}{6}$ des Würfels.
Es gibt vier solcher Eckpyramiden.
Das Volumen des Tetraeders beträgt somit $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$ des Würfelvolumens.



Würfelvolumen: $V_W = 3 \cdot 972 = 2916$

Würfelkantenlänge: $a = \sqrt[3]{V_W} = \sqrt[3]{2916} = 14.286...$

Die Würfelkantenlänge beträgt ungefähr 14.3 cm.

2.7

a $s = \sqrt[3]{\frac{V}{6\pi}}$ | **c** $s = \sqrt[3]{3V}$ | **e** $s = \sqrt[3]{(V-8)4} = \sqrt[3]{4V-32}$

b $s = \sqrt[3]{V+4}$ | **d** $s = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$ | **f** $s = \sqrt[3]{\frac{3V}{5}}$

3.1

a 5000 | **e** 8637.24 | **i** 6358.1 t

b 96.21 | **f** 15 426 607.9 | **k** 7084.2 km

c 385 | **g** 3274 g | **l** 410.52 m^3

d 27 910.63 | **h** 130.8 cm^2 | **m** 93.78 l

3.2

a $2.31 \cdot 10^2$ | **e** $2.3796 \cdot 10^2$ | **i** $8.6399 \cdot 10^4$ s

b $5.184 \cdot 10^3$ | **f** $8.31657 \cdot 10^3$ | **k** $7.142 \cdot 10^3$ m^2

c $6.7315 \cdot 10^4$ | **g** $1.33 \cdot 10^2$ m^3 | **l** $4.513 \cdot 10^1$ g $= 4.513 \cdot 10$ g

d $1.982604 \cdot 10^6$ | **h** $2.35781 \cdot 10^5$ km | **m** $9.548267 \cdot 10^3$ kg

3.3 *Wissenschaftliche Schreibweise*

3.4 **a** – Auf dem 12. Feld liegen 2048 Weizenkörner.
– $2084 = 2^{11} = 2.048 \cdot 10^3$

b – Das 30. Feld ist das letzte Feld mit einer Körnerzahl unter 1 Mia.
– $2^{29} = 536\,870\,912 = 5.36870912 \cdot 10^8$

c *Mögliche Anzeigen:*

Bei einem älteren Taschenrechner:	$9.223372 \cdot 10^{18}$
Bei einem Taschenrechner mit zehn Ziffern:	$9.223372037 \cdot 10^{18}$
Auf dem Computer mit einem Rechnerprogramm:	$9.22337203685478 \cdot 10^{18}$

Die angezeigte Zahl ist ungenau.

Hinweis:
Der Fehler gegenüber der genauen Zahl beträgt bei der ungenauesten Anzeige $9.223372 \cdot 10^{18}$ lediglich 0.00000039958%, also ~0.4 Millionstel Prozent.

3.5

6 Mio.	7 Ziffern	15.3 Bio.	14 Ziffern
$7 \cdot 10^3$	4 Ziffern	100 Mia.	12 Ziffern
$9.48 \cdot 10^6$	7 Ziffern	$9.999 \cdot 10^{99}$	100 Ziffern

3.6 **a** *Hinweis:*
Die Zahl kann je nach Taschenrechner-Modell unterschiedlich viele Ziffern aufweisen.

– *Mögliche Antwort:*
Anzeige des Taschenrechners: $2.656139889 \cdot 10^{95}$

– Diese Zahl ist gerundet.

Mögliche Begründung:
Die Zahl hat 95 Stellen nach dem Dezimalpunkt, der Taschenrechner kann jedoch nur 9 Stellen anzeigen.

b $9^{100} = 2.656139888\ldots \cdot 10^{95}$
9^{100} hat 96 Ziffern.

3.7 **a** kleinste Potenz: 6^{16}
grösste Potenz: 7^{19}
geordnete Darstellung: $6^{16} < 7^{16} < 6^{19} < 7^{19}$

b kleinste Potenz: 1^{83}
grösste Potenz: 8^{13}
geordnete Darstellung: $1^{83} < 81^3 < 3^{18} < 8^{13}$

c kleinste Potenz: $(-8)^{15}$
grösste Potenz: $(-5)^{18}$
geordnete Darstellung: $(-8)^{15} < 8^5 < 5^8 < (-5)^{18}$

3.8 $6\ \text{l} = 6 \cdot 10^6\ \text{mm}^3$
$5\ \text{l} = 5 \cdot 10^6\ \text{mm}^3$
maximale Anzahl Blutkörperchen: $5.5 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^6 = 3.3 \cdot 10^{13}$
minimale Anzahl Blutkörperchen: $4.5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^6 = 2.25 \cdot 10^{13} \approx 2.3 \cdot 10^{13}$

3.9 1:32:23 h = 5543 s

Weg des Lichts in Meter: $s = v \cdot t = 299\,792\,458 \cdot 5543 = 1.661749594694 \cdot 10^{12}$

Entfernung Erde – Saturn: ungefähr $1.662 \cdot 10^{9}$ km

3.10 **a** 3^{69}, 3^{96}, 6^{39}, 6^{93}, 9^{36}, 9^{63}, 36^{9}, 39^{6}, 63^{9}, 69^{3}, 93^{6}, 96^{3}

b grösste Zahl: $6^{93} = 2.3338142414697... \cdot 10^{72}$

kleinste Zahl: $69^{3} = 328\,509 = 3.28509 \cdot 10^{5}$

3.11 **a** *Zum Tüfteln:*

Die vier möglichen Zahlen:

999

$99^{9} = 913\,517\,247\,483\,640\,899 = 9.1351724748... \cdot 10^{17}$

$9^{99} = 29\,512\,665\,430\,652\,752\,148\,753\,480\,226\,197\,736\,314\,359\,272\,517\,043\,832\,886$
$063\,884\,637\,676\,943\,433\,478\,020\,332\,709\,411\,004\,889$
$= 2.951266543... \cdot 10^{94}$

$9^{9^{9}} = 196\,627\,050\,475\,552\,913\,618\,075\,908\,526\,912\,116\,283\,103\,450\,944\,214\,766\,927$
$315\,415\,537\,966\,391\,196\,809$
$= 1.966270504... \cdot 10^{77}$

Hinweis:

$9^{9^{9}}$ wurde in der Reihenfolge «9 hoch 9 hoch 9 gleich» eingetippt.

b Eingabe von: $(9^{9})^{9} = 387\,420\,489^{9} = 1.966270504... \cdot 10^{77}$

$9^{(9^{9})} = 9^{387\,420\,489}$ = Overflow, Error, Fehler, unendlich oder ähnliche Anzeige

Hinweis:

Die Zahl $9^{(9^{9})}$ ist so gross, dass sie kein Taschenrechner mehr ausrechnen und darstellen kann. Als Potenz kann man sie jedoch problemlos notieren. Hier wird deutlich, wie sinnvoll die Potenzschreibweise in der Mathematik ist.

3.12 *Zum Tüfteln:*

Hinweis:

Das Ergebnis der Recherche hängt vom Taschenrechnermodell ab.

4.1

a	0.001	**d**	0.0000804	**g**	0.00046 m
b	0.05	**e**	0.6205 kg	**h**	0.152 s
c	0.0000091	**f**	0.0073 cm^{3}	**i**	0.00000029 g

4.2 **a** $2 \cdot 10^{-2}$ **d** $4.3 \cdot 10^{-1}$ **g** $9.7 \cdot 10^{-3}$ mm³

b $5.7 \cdot 10^{-2}$ **e** $2.4 \cdot 10^{-1}$ ns **h** $1.36 \cdot 10^{-3}$ μm

c $6.1 \cdot 10^{-4}$ **f** $1.08 \cdot 10^{-2}$ mg **i** $2.095 \cdot 10^{-3}$ s

4.3 *Darstellung kleiner Zahlen*

4.4 **a** Gewicht des Blauwals: 200 000 000 g $=$ $2 \cdot 10^{8}$ g

b Gewicht der Etruskerspitzmaus: 0.000002 t $=$ $2 \cdot 10^{-6}$ t

c $200 : 0.000002 = 200 : (2 \cdot 10^{-6}) = 100\,000\,000$
Der Blauwal ist 100 Millionen-mal schwerer als die Etruskerspitzmaus.

4.5 grösster erlaubter Durchmesser: 68.002 mm
kleinster erlaubter Durchmesser: 67.998 mm

4.6 $t = \frac{s}{v} = \frac{50}{299\,792\,458} = 0.00000016678205 = 1.6678205 \cdot 10^{-7}$

Der Laserstrahl legt die 50 m in ungefähr $1.7 \cdot 10^{-7}$ s oder in ungefähr $1.7 \cdot 10^{-4}$ ms zurück.

5.1 **a** *Mögliche Vorgehen:*
– Term links und rechts ausrechnen: $49 + 343 \neq 16\,807$
– Potenzen als Produkte schreiben: $7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 \neq 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

b –
$$\begin{aligned}
3^4 &= 81 \\
&\quad : 3 \\
3^3 &= 27 \\
&\quad : 3 \\
3^2 &= 9 \\
&\quad : 3 \\
3^1 &= 3 \\
&\quad : 3 \\
3^0 &= 1 \\
&\quad : 3 \\
3^{-1} &= \frac{1}{3^1} \\
&\quad : 3 \\
3^{-2} &= \frac{1}{3^2} \\
&\quad : 3 \\
3^{-3} &= \frac{1}{3^3}
\end{aligned}$$

– *Mögliche Begründung:*
Die ausgerechneten Potenzen rechts werden laufend durch 3 geteilt. Das führt zu den Brüchen rechts des Gleichheitszeichens. Links werden die Exponenten immer um 1 verkleinert, was schliesslich zu negativen ganzen Zahlen als Exponent führt.

Anmerkung:
Hier wird mit dem sogenannten «Permanenzprinzip» verständlich gemacht, dass die Definition der Potenzen mit ganzen negativen Exponenten sinnvollerweise nur so erfolgen kann. Die Definition als Anzahl Faktoren wie bei den natürlichen Exponenten taugt hier nicht mehr.

5.2

a $7^{11} = 1\,977\,326\,743$

b $3^9 = 19\,683$

c $(-15)^8 = 2\,562\,890\,625$

d $2 \cdot 0.4^4 = 0.0512$

e $(-6)^8 = 1\,679\,616$

f $1 \cdot 0.02^4 = 0.00000016$

g $5^5 = 3125$

h $10^7 = 10\,000\,000$

i $8^{11} - 8^{10} = 8^{10}(8^1 - 1)$
$= 8^{10} \cdot 7$
$= 7\,516\,192\,768$

5.3

a x^2y^2

b $125a^3$

c $(7y)^2$

d b^8

e c^5

f $a^4(a-1)$

g $9x^2y^2 = 3^2x^2y^2$

h $6b^2(b+1)$

i a^{13}

5.4

a e^{13}

b n^7

c $20x^5$

d $\frac{2y^7}{5}$

e $16a^3 = 2^4a^3$

f $2a^3$

g 4^{2x+1}

h $3y^{2x-1}$

i b^2

k $4x^3$

l 0

m $324c^7$

5.5

a $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} = 0.015625$

b $\frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25} = 0.04$

c $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$

d $(-8)^{-4} = \frac{1}{(-8)^4} = 0.00024414\ldots$

e $25^{-2} = \frac{1}{25^2} = 0.0016$

f $3^0 = 1$

g $0.01^{-12} = \frac{1}{0.01^{12}} = 1 \cdot 10^{24}$

h $(-0.2)^{-3} = \frac{1}{(-0.2)^3} = -125$

i $\frac{1}{0.5^{-4}} - 0.5^3 = 15.875$

5.6

a $\frac{1}{b^3}$

b $\frac{5}{a^2}$

c $\frac{1}{2e}$

d $\frac{1}{p^4}$

e $12x$

f $(a+b)^{2x}$

g $20x^{-1} = \frac{20}{x}$

h 0.7^a

i $\frac{8}{x} \cdot \frac{1}{4x^2} = \frac{2}{x^3}$

k $\frac{1}{c^8} - \frac{1}{c^7} = \frac{1-c}{c^8}$

l $\frac{1}{(2a)^2} \cdot a = \frac{1}{4a}$

m $(x-1)^0 = 1$

Potenzen mit ganzen Exponenten